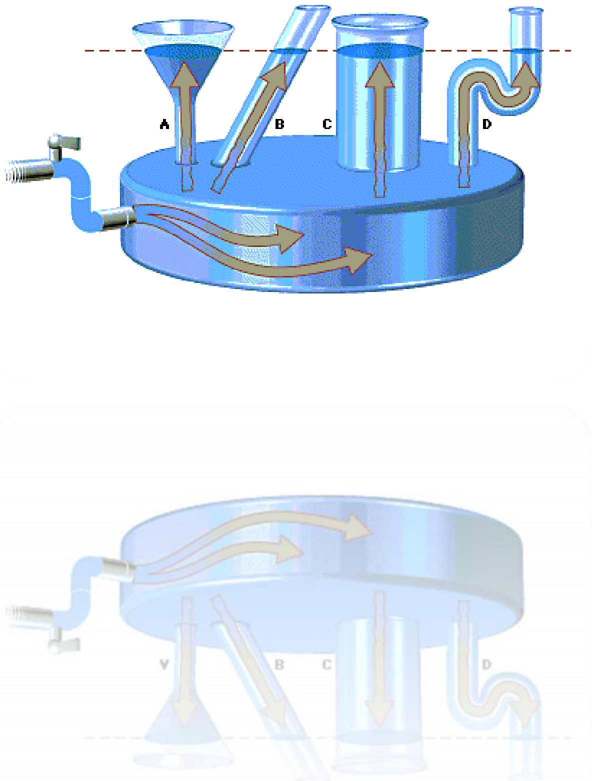
# Chapitre II :

# Mécanique des fluides



## 1. Introduction

Les fluides sont des corps (liquides et gaz) qui, n'ayant pas de forme propre, sont facilement déformables sous l'action de très faibles contraintes (forces) extérieures. La mécanique des fluides se compose de l'étude des fluides au repos et des fluides en mouvement. Les applications de la mécanique des fluides sont très importantes notamment dans la biologie.

## 2. Définition de la mécanique des fluides

- La mécanique des fluides étudie le comportement des fluides :

- au repos : hydrostatique (la statique des fluides).

- en mouvement : hydrodynamique (la dynamique des fluides).

Un fluide est un liquide ou un gaz

- On distingue deux types de fluides :

- les liquides $\Rightarrow$ incompressibles

- les gaz $\Rightarrow$ compressibles

**Exemples :** l'eau liquide, l'huile, l'essence (liquide), l'oxygène (gaz), l'air (gaz)……….

**a. Fluides parfaits** se sont les fluides dans lesquels la force de frottement dans les fluides (viscosité) est nulle.

**b. Fluides réels** se sont les fluides dans lesquels la force de frottement dans les fluides (viscosité) est différente de zéro.

**Remarque :**

En réalité tous les fluides sont réels car, dans la nature les fluides à viscosité nulle n'existent pas.

## 3. Caractéristiques d'un fluide

### 3.1. Masse volumique:

La masse volumique d'un fluide est la masse de l'unité de volume de ce fluide.

$$\boldsymbol{\rho = \frac{m}{V}}$$

Où :

**$\rho$** : Masse volumique en (kg/m$^3$),

**m** : masse en (kg),

**V** : volume en (m$^3$).

### 3.2.La densité :

La densité est la masse volumique du fluide/la masse volumique d'un fluide de référence

$$d = \rho / \rho_{ref}$$

Dans le cas des liquides en prendra l'eau comme fluide de référence. Dans le cas des gaz on prendra l'air comme fluide de référence.

## 4. Notions de compressibilité et incompressibilité

1. Un fluide est dit **compressible** si sa **masse volumique $\rho$ varie avec la pression ou la température**.
2. On dit qu'un **fluide est incompressible** si sa **masse volumique ($\rho$ est Constante) ne dépend pas de la pression exercée sur ce fluide.**

Par exemple l'eau et plus généralement les liquides sont des fluides incompressibles.

Par contre, l'air et plus généralement les gaz, sont des fluides compressibles ($\rho$ varie) et qui occupent tout le volume qui leur est offert.

**Remarque :**

1. Un fluide se caractérise par trois (03) grandeurs principalement :

   Pression, température et masse volumique.

2. Les gaz peuvent être considérés incompressibles dans certaines conditions de pression et température.

**Exemple** : L'air dans les conditions atmosphériques : 100KPa et $T_{ambiante}$

## *Partie I. Hydrostatique*

### I.1. La Pression

La pression est égale au quotient de la valeur F de la force pressante par l'aire S de la surface pressée. Donc la pression est la force qui s'exerce par unité de surface :

$$P = \frac{F}{S}$$

Où : **F** est la force s'exerçant perpendiculairement à la surface et **S** est l'aire sur laquelle la force F est appliquée.

Par analyse dimensionnelle : $[P] = ML^{-1}T^{-2}$

***L'unité de la pression dans le Système International*** :

1 Pascal =1 Pa =1 kg/ms$^2$= 1 N/m$^2$.

Autres unités de la pression:

- ✓ Le bar : **1 bar = 10$^5$ Pa**
- ✓ L'atmosphère : ***1 atm = 1,01325 × 10$^5$ Pa***
- ✓ La hauteur de mercure (le millimètre de mercure) : 760 mm Hg = ***1 atm***

***Donc:***

1 atm = 1,013.10$^5$N/m$^2$ = 1,013.10$^5$Pa =1,013 bar = 760 mm.Hg = 760 Torr.

**Exemple :**

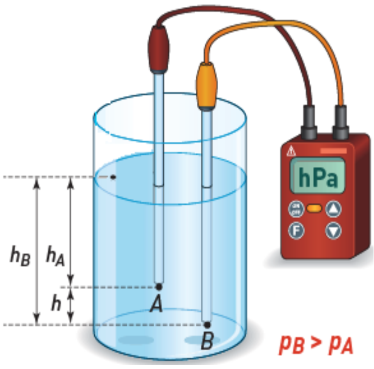
Un bloc métallique ayant la forme d'un parallélépipède, dont les arêtes mesurent 1 m, 0,8 m et 0,5 m. Le bloc, de masse volumique 7800 kg.m$^{-3}$, repose sur le sol par une de ses faces. Calculer la pression exercée sur le sol, dans les trois cas possibles.

### I.2. La Relation fondamental de l'hydrostatique (RFH)

La différence des pressions entre deux points A et B d'un liquide en équilibre est égale :

$$P_A - P_B = \rho\, g\, h = \rho\, g\, (h_B - h_A)$$

$\rho$ est la masse volumique du liquide exprimé en kilogrammes par mètre cube (**kg.m$^{-3}$**)




**g** est l'intensité de la pesanteur (soit à Constantine : 9,81 **m.s**$^{-2}$)

***h*** est la différence de niveau entre les deux points A et B (hauteur) exprimée en mètres (**m**)

***P**$_A$* et ***P**$_B$* sont les **pressions exprimées en Pascals (Pa).**

**Remarque :**

La pression augmente avec la profondeur dans le liquide, la position du point dans le liquide est repérée par rapport à la surface du libre du liquide.

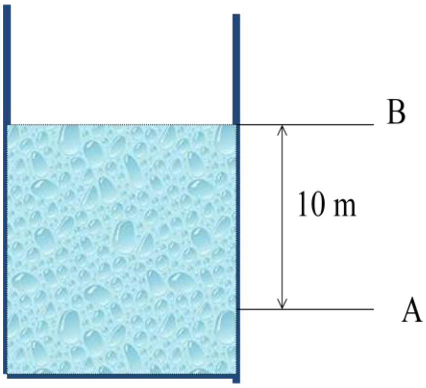
Si h = 0, alors $P_A = P_B$ : la pression en deux points A et B situées dans le même plan horizontale sont égales.

Donc : le théorème reste valable pour deux points A et C ne se trouvent pas sur la même verticale.

**Exemple 1:**

Deux points situés *dans l'eau* sont à 10 m l'un au-dessus de l'autre. La masse volumique de l'eau étant ρ = 1000 kg·m$^{-3}$.

Calculer la différence de pression entre ces deux points.




***Réponse:***

$P_A - P_B = \rho\, g\, h$

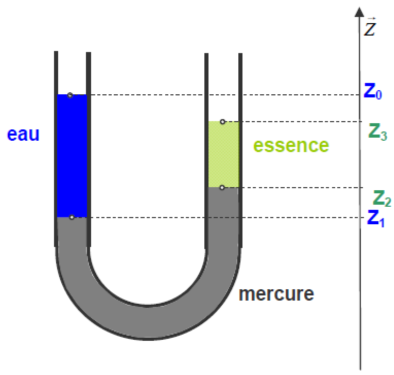
$P_A - P_B = 1\,000 \times 9{,}81 \times 10$

$\mathbf{P_A - P_B = 9{,}81 \times 10^4\ Pa}$

**Exemple 2:**

On considère un tube en U contenant trois liquides:

- de l'eau ayant une masse volumique $\rho_1$ = 1000 kg/m$^3$,
- du mercure ayant une masse volumique $\rho_2$ = 13600 kg/m$^3$,
- de l'essence ayant une masse volumique $\rho_3$ = 700 kg/m$^3$.




On donne :

$Z_0 - Z_1 = 0{,}2$ m

$Z_3 - Z_2 = 0{,}1$ m

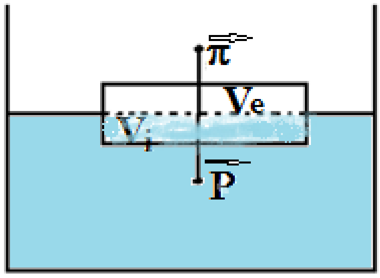
$Z_1 + Z_2 = 1{,}0$ m

On demande de calculer $Z_0$, $Z_1$, $Z_2$ et $Z_3$.

**Réponse :**

$Z_0 = 0{,}6952$ m, $Z_1 = 0{,}4952$ m, $Z_2 = 0{,}5048$ m et $Z_3 = 0{,}6048$ m

### I.3. Poussée d'Archimède




Lorsque un corps solide est plongé dans un fluide, il reçoit une poussée (force) verticale, dirigée vers le haut et égale au poids du fluide déplacé.

On a : Le poids du corps est :

$$p = m.g = \rho V_{\text{totale}}\, g = \rho\,(V_i + V_e)\, g$$

La poussée d'Archimède est : $\pi = \rho_0 V_i g$

Où $\rho$ est la masse volumique du corps et $\rho_0$ celle du fluide, $V_i$ est le volume immergé et $V_e$ est le volume émergé.

A l'équilibre on a : $\pi = p \Rightarrow \rho_0 V_i g = \rho\,(V_i + V_e) g \Rightarrow \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{V_i}{(V_i + V_e)}$

Selon les valeurs de $\rho$ et $\rho_0$, on distingue les phénomènes suivants:

- Lorsque $\rho > \rho_0$ on a **une immersion** : le corps solide se trouve complètement immergé dans le fluide.
- Lorsque $\rho < \rho_0$ on a **une flottaison** : le corps solide flotte à la surface du liquide (une partie se trouve dans le fluide et l'autre dans l'air).
- Lorsque $\rho \approx \rho_0$ on a **une suspension** (cas de certains médicaments : sirops).

**Exemple** : Les masses volumiques de la glace, de l'eau de mer et de l'air sont respectivement 920 kg/m$^3$, 1025 kg/m$^3$et $10^{-3}$kg/m$^3$. Calculer la fraction $V_e/V_i$ (volume émergé /volume immergé) d'un iceberg?

### I.4. Presse hydraulique

Elle est constituée de deux (2) cylindres communicants de sections S et s. A l'équilibre, les pressions sous les pistons sont égales car les points A et B sont situés sur une même horizontale. Lorsqu'on exerce une petite force sur le piston de section s, le piston de section S s'élève.

Donc, la presse hydraulique est utilisée pour soulever des charges lourdes.

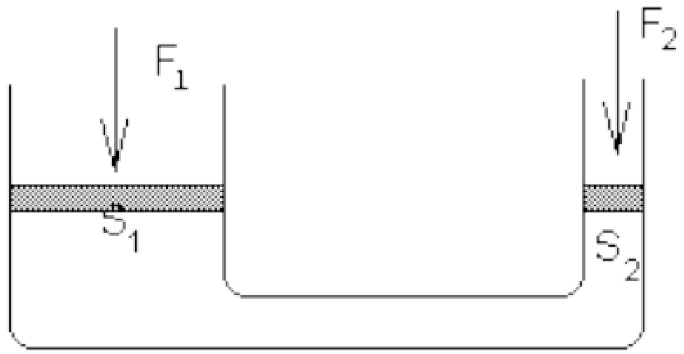
On a à l'équilibre :

$$P_A = P_B \Rightarrow \frac{F}{S} = \frac{f}{s}$$

$$\Rightarrow F = \left(\frac{S}{s}\right) f$$

**Exemple :** Deux vases communicants cylindriques A et B ont respectivement 90 $cm^2$et 10 $cm^2$ de section. Ils contiennent de l'eau et sont fermés par deux pistons en contact avec l'eau. On exerce sur le plus petit piston une force de 200 N.

Calculer la force qu'il faut exercer sur l'autre piston pour qu'on ait équilibre.




La force $F_2$ crée une surpression P qui se transmet dans tous le liquide. On a donc:

$$P = F_2/S_2$$

$$P = F_1/S_1$$

d'où : $F_1 = F_2.S_1/S_2$

$$F_1 = 200.90/10$$

$$F_1 = 1800 \text{ N}$$

## *Partie II. Hydrodynamique*

Le mouvement d'un liquide idéal dans un tuyau de section S est caractérisé par son débit Q.

**II.1. Le débit** est le quotient de la quantité de fluide qui traverse une section droite de la conduite par la durée de cet écoulement.

a. **Débit massique** : Si **Δm** est la masse de fluide qui a traversé une section droite de la conduite pendant le temps **Δt**, par définition le débit massique est :

$$Q_m = \Delta m/\Delta t \qquad \text{dont l'unité : } \mathbf{kg.s^{-1}}$$

b. **Débit volumique** : Si **ΔV** est le volume de fluide qui a traversé une section droite de la conduite pendant le temps **Δt**, par définition le débit volumique est :

$$Q_v = \Delta V/\Delta t \qquad \text{dont unité : } \mathbf{m^3.s^{-1}}$$

Si S la section du tube (S constante). Le liquide se déplace une distance $\Delta x$ pendant un temps Δt. Le volume du liquide sortant du tube est :

$$\Delta V = S.\,\Delta x = S.v.\,\Delta t$$

et puisque : $\Delta V = Q.\,\Delta t$

Donc : $Q = S.\,v$ avec $S = \pi r^2 = \pi \frac{d^2}{4}$

**Exemple :** Dans un tube de diamètre intérieur d = 12,7 mm s'écoule, à la vitesse moyenne de 1,2 m/s, de l'huile de masse volumique 820 kg/m³. Calculer le débit volumique $Q_v$ et le débit massique $Q_m$.

### II.2. L'équation de continuité

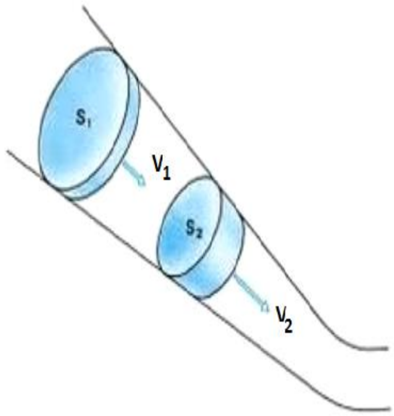
Dans un circuit circulatoire d'un fluide dont la section est variable d'un endroit à l'autre, la vitesse circulatoire v est également variable, mais le débit doit rester constant (il s'agit d'un tube rigide et non déformable) en suivant le principe que la quantité de liquide qui entre à une extrémité du circuit doit ressortir à l'autre bout.

Pour une surface fermée :

débit massique entrant = débit massique sortant i.e :

$Q_{m_1} = Q_{m_2} \Rightarrow \frac{\Delta m_1}{\Delta t_1} = \frac{\Delta m_2}{\Delta t_2} \Rightarrow \frac{\rho.\Delta V_1}{\Delta t_1} = \frac{\rho.\Delta V_2}{\Delta t_2}$

$\Rightarrow \frac{\rho. S_1 \Delta x_1}{\Delta t_1} = \frac{\rho. S_2 \Delta x_2}{\Delta t_2}$




$$\Rightarrow \boldsymbol{S_1. v_1 = S_2. v_2}$$

L'équation de continuité qui découle exprime que le produit de la section et de la vitesse est constant en tout point du circuit et égal au débit :

$$\mathbf{Q} = \boldsymbol{S_1. v_1 = S_2. v_2} = \mathbf{Cst}$$

**II.3. L'énergie mécanique d'un fluide**

Un liquide en mouvement possède trois formes d'énergie mécanique liées respectivement à la pression, à l'altitude et à la vitesse. Pour les deux premières il s'agit d'énergie potentielle et pour la troisième, d'énergie cinétique.

On exprime généralement ces formes d'énergie en unités de pression (c'est en fait l'énergie par unité de volume : $J.m^{-3} = Pa$).

L'énergie potentielle comporte donc deux termes :

- l'énergie liée à la pression : $E_{p1} = p$
- l'énergie liée à l'altitude : $E_{p2} = \rho g z$

L'énergie cinétique découle de la vitesse circulatoire $v$ : $\mathbf{E_c = \rho v^2/2}$

L'énergie mécanique totale du fluide est alors la somme de ces trois termes :

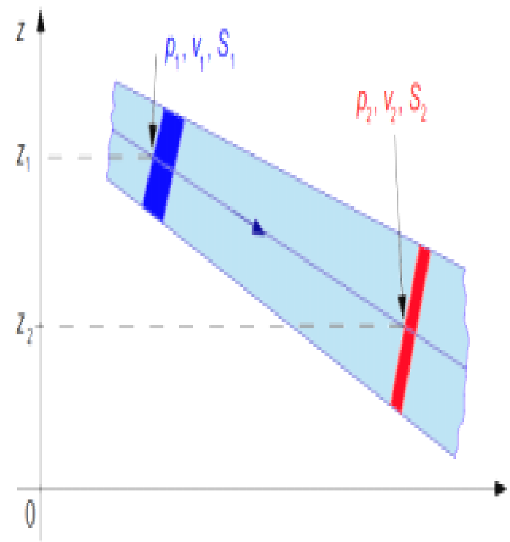
$$E_m = P + \rho g z + \frac{1}{2}\rho v^2$$

**II.4. Le théorème de Bernoulli**

Ce théorème exprime simplement que l'énergie mécanique totale d'un fluide idéal (sans perte de charge) est constante dans un circuit dans lequel il circule à débit constant (au cours du temps).

$$E_m = P + \rho g z + \frac{1}{2}\rho v^2 = cste$$

C'est donc la transposition, à un fluide en mouvement, de la loi de Pascal valable pour un fluide statique (si $v$ = 0 le théorème de Bernoulli se réduit à p + $\rho gz$ = Cste).




Les différentes formes d'énergie (potentielles et cinétique) peuvent par contre se transformer les unes dans les autres, à condition que l'énergie totale reste constante :

$$P_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

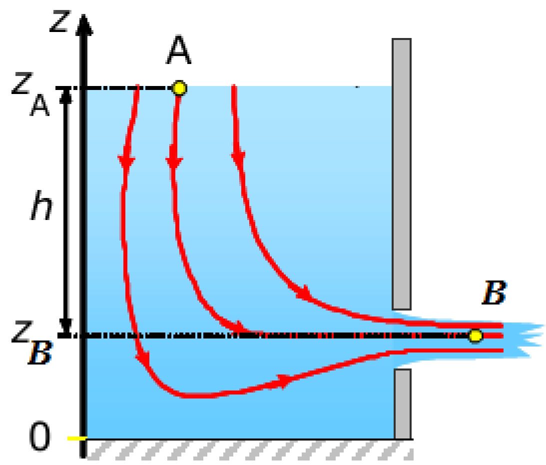
Les conditions d'application du théorème de Bernoulli sont:

- ✓ fluide incompressible et densité constante.
- ✓ fluide non visqueux (pas de frottements) donc pas de perte de charge (perte de pression).
- ✓ fluide en écoulement stationnaire (vitesse d'écoulement constante) et non turbulent.

## II.5. Applications du théorème de Bernoulli

### a. Vase de Torricelli

Considérons un réservoir cylindrique rempli d'un liquide dans lequel on perce un orifice. La formule de Torricelli relie le débit d'écoulement avec la hauteur de liquide h.




L'application du théorème de Bernoulli entre les points A et B donne :

$$P_A + \rho g z_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = P_B + \rho g z_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2$$

Puisque : $P_A = P_B = P_{atm}$; $v_A \ll v_B$ d'où :

$$\frac{1}{2}\rho v_B^2 = \rho g z_A - \rho g z_B$$

$$\Rightarrow \; v_B = \sqrt{2g(z_A - z_B)}$$

**Exemple :** un réservoir ouvert à l'air libre. Un orifice B est pratiqué à 0,3 m de la surface libre du liquide. Le niveau du liquide est maintenu constant. Quelle est la vitesse de l'écoulement en B?

### b. Effet Venturi

Certains dispositifs mettent à profit les propriétés décrites par le théorème de Bernoulli pour mesurer la vitesse circulatoire d'un liquide.

Le tube étant supposé horizontal ($Z_1= Z_2= Z_3$) le théorème de Bernouilli se réduit à :

$$\boldsymbol{P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2}$$

Soit :

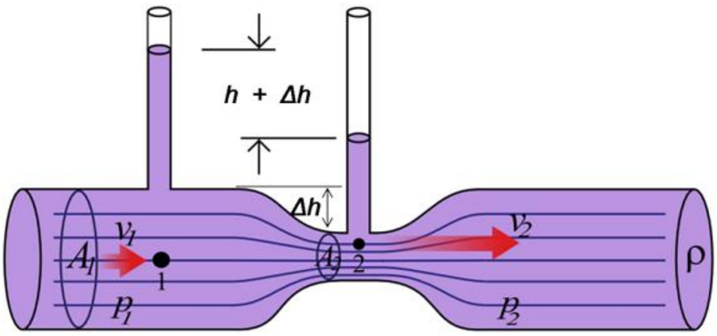
$$\boldsymbol{\Delta P = P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)}$$

En appliquant alors l'équation de continuité :

$S_1 . v_1= S_2 . v_2$, on aboutit à :

$$\boldsymbol{\Delta P = P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho v_1^2 \left[\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1\right]}$$

Relation qui exprime que la chute de pression réalisée au niveau de la partie resserrée du tube est proportionnelle au carré de la vitesse circulatoire dans la partie large du tube ($S_1$, $S_2$ et $\rho$ étant des constantes). Cette propriété permet d'utiliser le tube de




Venturi pour la mesure des vitesses circulatoires, la valeur de cette vitesse étant déduite de la dépression mesurée sur les manomètres. Pour passer au débit, il suffit de multiplier par la surface de section $S_1$ du tube dans sa partie large.

### c. Tube de Pitot

On considère un liquide en écoulement permanent dans une canalisation et deux tubes plongeant dans le liquide, l'un débouchant en A face au courant, et l'autre en B est le long des lignes de courant, les deux extrémités étant à la même hauteur.

Au point B, le liquide a la même vitesse *v* que dans la canalisation et la pression est la même que celle du liquide $P_B = P$.

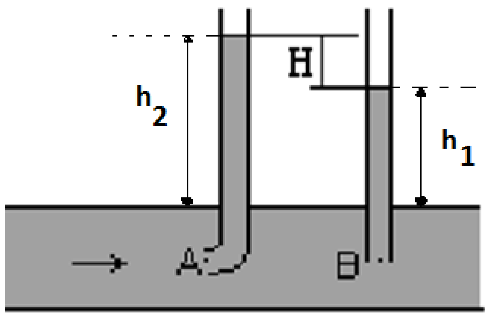
En A, point d'arrêt, la vitesse est nulle et la pression est $P_A$.

L'application du théorème de Bernoulli entre les points A et B donne :

$$P_A + \rho g h_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = P_B + \rho g h_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2$$

Puisque : $h_A = h_B$ : même horizontale ; $v_A = 0$ : point de prise de pression d'où :

$$P_A = P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2$$




L'application du théorème de Pascal pour les A et B :

$$P_A = P_0 + \rho g z_A$$

et

$$P_B = P_0 + \rho g z_B$$

Puisque : $Z_A - Z_B = H$ d'où :

$$P_A = P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 \Rightarrow \frac{1}{2}\rho v_B^2 = \rho g H$$

En mesurant la dénivellation H du liquide dans les deux tubes, on peut en déduire la vitesse *v* d'écoulement du fluide.