Chapitre I :

Rappel mathématique

I. Introduction

Le mot physique vient d'un mot grec qui signifie nature, donc la physique est une science qui s'intéresse à l'étude des phénomènes naturels. Tout les processus naturels observés dans la nature obéissent à des lois bien déterminées. Comme toute autre science, la physique a pour objectif essentiel la découverte et l'étude de ces lois. Les sciences physiques jouent un rôle très important en biologie, en médecine puisque les phénomènes comme la montée de la sève dans les végétaux, l'ouïe, la vue, la tension artérielle, …etc sont des problèmes qui ne peuvent être expliqués sans les lois de la physique. La physique est une science exacte où les lois sont exprimées par des formules mathématiques. Pour décrire ces lois, la physique fait appel aux notions de grandeurs physiques.

II. Les grandeurs physiques

II.1. Définition

Une grandeur physique « **G** » est tout ce qui prend, dans des conditions bien définies une valeur déterminées. Donc, On appelle grandeur physique toute propriété physique mesurable.
A chaque grandeur physique correspond une unité et l'ensemble des unités est regroupé dans un système universel, le système international.
Dans le cas général :
La mesure d'une grandeur physique « G » peut donc toujours s'écrire sous la forme :

$$G = A\ \textbf{unité}$$

avec :
A : un réel,
Unité : l'unité choisie pour évaluer la grandeur **G**.
Exemple : la vitesse de la lumière dans le vide

$$C = 3\ .10^{-8}\ m.s^{-1}$$

On distingue deux types de grandeurs :

a. Grandeurs physiques repérables (non mesurable):

- Une grandeur physique est repérable s'il est possible de définir une relation d'ordre pour chaque couple d'observation une grandeur, sans lui donner des valeurs numériques précises.
Aussi certaines grandeurs ne sont pas mesurables.
Exemple : Dureté, Viscosité, Couleur ……etc.

b. Grandeurs physiques mesurables

Une grandeur physique est mesurable quand elle peut servira des opérations d'addition ou de multiplication. Il existe deux types de grandeurs mesurables : **Scalaires et Vectorielles**.

- **Grandeur scalaire :**

  -définies par un seul nombre avec une unité.

  -ni direction, ni sens.

Exemple de grandeurs scalaires :

- La longueur, l = 20 m.
- la Masse, m=100 kg.
- le Temps, t=10s.

- **Grandeur Vectorielles :** qui sont caractérisées or définies par:

  -un point d'application.

  -un module (la longueur).

  - une sens.

  -une direction.

Exemple de grandeurs vectorielles

- La vitesse, l'accélération, la force

II.2.Analyse Dimensionnelle

Les unités : Il existe plusieurs systèmes d'unité mais le plus usuel est le système international des unités (Constitué de 7 unités fondamentales) correspondant à 7 grandeurs physiques.

Grandeur de base	Symbole associé à la dimension	Nom et symbole de l'unité
masse	M	Kilogramme (Kg)
longueur	L	Mètre (m)
temps	T	Seconde (s)
Intensité électrique du courante	I	Ampère (A)
Quantité de matière	N	Mole (mol)
Température	ϴ	Kelvin (K)
Intensité lumineuse	J	Candela (Cd)

Les quatre premières unités forment le système international **MKSA**.

Remarque : Il existe aussi d'autres systèmes d'unités en physique, comme par exemple :

- Le système CGS (Centimètre, Gramme, Seconde).
- Le système MTS (Mètre, Tonne, Seconde).

Une unité supplémentaire : il existe deux des unités supplémentaire

-les angles plans « α » (Radian).

- Les angles solide « Ω » (steradian).

II.3. Les grandeurs dérivées

Les grandeurs dérivés est une grandeur physique qui est définie à partir d'autres qui sont déjà connues.

Exemple : la vitesse, l'accélération, la force, le travail, la fréquence

- La vitesse: v = distance/temps
- L'accélération: γ=a=g= vitesse/temps
- La force: F= m. a
- Le travail: W= F.l

II.4. Les unités dérivées

Toutes les unités des grandeurs physiques dérivent des unités fondamentales.

- La vitesse: v = distance/temps Uv= m/s
- L'accélération: γ=a=g= vitesse/temps Ua= m.s-^{2}
- La force: F= la masse. L'accélération = m . a= m. g Uf = Kg.m. s-^{2} = Neuton (N).
- Le travail: W= F.l Uw = Kg m s^{-2}. m = Kg.m^{2}. s-^{2} = Joule
- La Fréquence: f=1/T Uf= s-^{1} = HZ (Hertz)
- La pression: P = la force / la surface = F/S Up= Kg.m. s-^{2}. m-^{2} =N. m^{2} = Pascal.
- Le potentiel : U= Puissance / courant U_u= Volt= V= Wat.A^{-1}= m^{2}.Kg.s^{-3}. A^{-1}
- La capacité : C= Q/U U_C= Kg^{-1}.m^{-2}.A^{-2}.s^{4}= Farad

II.5. Les équations aux dimensions

II.5.1. Dimension d'une grandeur

- **Définition :**

La dimension d'une grandeur correspond à ce que représente cette grandeur, elle renseigne sur sa nature. C'est une caractéristique plus générale que son unité dont le choix est adapté à l'échelle du phénomène étudié.

La dimension d'une grandeur **G** se note entre crochet : **[G]**.

Par exemple si la grandeur G est une masse alors [G] = M : G a la dimension d'une masse.

Dimension **d'une vitesse** :

$$[v] = [\text{longueur}] / [\text{temps}] = L/T = L.T^{-1}$$

On dit que la vitesse est **homogène** à une longueur divisée par un temps.

II.5.2. Règles sur les équations aux dimensions

On appelle équation aux dimensions la relation liant la dimension [G] d'une grandeur G avec les dimensions de base. La dimension d'une grandeur G est obtenue à partir des relations entre grandeurs physiques :

- Si $[G] = 1 \Rightarrow$ on dit que G est sans dimension.
- Si $[G] = L \Rightarrow$ on dit que G est Homogène.
- Les deux membres d'une somme ou d'une différence doivent avoir la même dimension.
  - ✓ $G=G_1+G_2 \Rightarrow [G]=[G_1]=[G_2]$
  - ✓ $G=G_1- G_2 \Rightarrow [G]=[G_1]=[G_2]$
- La dimension d'un produit (ou d'un quotient) est le produit (ou le quotient) des dimensions
  - ✓ $G=G_1.G_2 \Rightarrow [G]=[G_1].[G_2]$
  - ✓ $G=G_1/G_2 \Rightarrow [G]=[G_1]/[G_2]= [G]=[G_1].[G_2]^{-1}$
- $[G^n]= [G]^n$
- Les deux membres d'une égalité doivent avoir la même dimension ;
- Une grandeur égale au quotient de 2 grandeurs de même dimension n'a pas de dimension (elle est de dimension 1).

  Donc [G]: Nous renseigne sur la nature de la G.

Dans le cas général: L'équation aux dimensions d'une grandeur G prend le frome:

$$[\mathbf{G}] = \mathbf{M^a L^b T^c I^d \theta^e N^f J^g}$$

où M, L, T, I,….., J sont respectivement les symboles de la masse , de la longueur , du temps,…….. et Intensité lumineuse et a, b, c,……,g des nombres réels.
A, b, c, d, e, f et g : Exposant sans dimension.

$$[a]= [b]=[c]=[d]= [e]= [f]= [g]= 1$$

Exemples :

- une accélération : $[a]=[v] / [t]= L.T^{-1}/ T= L.T^{-2}$

- une force : $[F] = [m].[a]= M. L.T^{-2}$

- un travail :$[w] = [F].[l] = M. L.T^{-2}.L = M. L^2.T^{-2}$

- l'énergie : $[E] = [1/2]. [m]. [v^2]= 1.M.L^2.T^{-2} = M.L^2T^{-2}$

- une puissance : $[P] = [E]/[t]= [w]/[t]= ML^2T^{-2}.T^{-1}= ML^2T^{-3}$

- un potentiel $[U]$= [Puissance]/ [courant]= [Travail]/ [charge]= $ML^2T^{-3} .I^{-1}$

- une résistance: $[R] = [U]/ [I]= ML^2T^{-3} .I^{-1}. I^{-1}= ML^2T^{-3}I^{-2}$

- la Surface: $[S]= [l]. [l] = L^2$

- la Volume: $[V] = L^3$

- la Masse volumique: $[\rho]= [m]/ [V]= M. L^{-3}$

- Le Poids: $[p] = [m]. [g]= M. L.T^{-2}$

- Une quantité de chaleur : $Q = M. L^2.T^{-2}$ (comme un travail)

- Une pression, une contrainte : $[P]= [F]/ [S]= M. L.T^{-2}. L^{-2}= M. L^{-1}.T^{-2}$

L'analyse dimensionnelle va nous permettre de retrouver facilement les formules physiques et d'éviter les erreurs dues aux unités puisque toutes les relations entre les grandeurs physiques sont homogènes de point de vue dimensions.

Exercice : Déterminer l'équation aux dimensions de :

1. La charge : Q= I. t

2. La capacité : C= Q/U

Remarque :

Les fonctions exponentielles (exp (a/b)), logarithmiques, trigonométriques, ainsi que les constantes et tout ce qui se trouve à l'intérieur de ces fonctions ont pour dimension la valeur 1

$$[x] = 1, [\alpha] = 1, [\sin\alpha] = 1, [e^x] = 1$$

II.6. Homogénéité d'une équation

Pour qu'une équation soit homogène il faut vérifier :

- Les termes d'une somme ou d'une différence doivent avoir la même dimension.
- Les deux termes d'une égalité doivent avoir la même dimension.
- Les fonctions mathématiques (sin, cos, tan, exp, ln...) ainsi que leurs arguments sont sans dimension.
- Un nombre réel est sans dimension.

L'analyse dimensionnelle est un outil puissant pour détecter une erreur :

Une relation non Homogène est obligatoirement fausse.

Il faut en effet se rappeler le principe suivant :

Tout résultat non homogène est nécessairement faux

Par contre, un résultat homogène n'est pas forcement le bon.

Exemples :

Comme chacun sait, Einstein a trouvé que l'énergie $E = m.C^2$ et on va vérifier l'homogénéité de cette équation d'Einstein :

On a :

- $[E] = M.\ L^2.\ T^{-2}$
- $[mC^2] = [m].\ [C^2] = M.\ L^2.\ T^{-2}$

On peut dire l'équation d'Einstein est homogène du point de vue analyse dimensionnelle.

2. Vérification de l'homogénéité de l'équation $E = 4\ mC^2$, On a :

- $[E] = M.\ L^2.\ T^{-2}$
- $[4mC^2] = [m].\ [C^2] = M.\ L^2.\ T^{-2}$

On peut dire l'équation précédente est homogène du point de vue analyse dimensionnelle. Un résultat bon mais avec une équation fausse.

II.7. Changement de système de grandeurs (Relation entre les unités)

Les relations entre les unités des différents systèmes peuvent être facilement établies en utilisant les équations aux dimensions.

Exemple :

Trouver la relation existant entre la Barye (unité de pression dans le système CGS) et le pascal (unité de pression dans le SI).

P: Pression

$[P]= ML^{-1}T^{-2}$

$U_P\,(SI)/U_P(GCS) = 1Pa/\ 1Barye= (ML^{-1}T^{-2})_{SI}/\ (ML^{-1}T^{-2})_{GCS} = (Kg.m^{-1}.s^{-2})/\ (g.cm^{-1}.s^{-2})$

$$= (10^3 g.10^{-2}\ cm^{-1}.s^{-2})/\ (g.cm^{-1}.s^{-2}) = 10$$

$1Pa/\ 1Barye = 10 \Rightarrow 1Pa = 10$ Barye.

E : Energie cinétique

CGS (U_E= erg) ; SI (U_E=Joule)

$E_c= (1/2)\ m\ V^2$, On cherche $U_E(SI)/U_E(CGS)=?$

$U_E(SI)/U_E(GCS) = 1Joule/\ 1erg= (ML^2T^{-2})_{SI}/\ (ML^2T^{-2})_{GCS} = (Kg.m^2.s^{-2})/\ (g.cm^2.s^{-2})$

$$= (10^3 g.10^4\ cm^2.s^{-2})/\ (g.cm^2.s^{-2}) = 10^7$$

$1Joule/\ 1erg = 10^7 \Rightarrow 1\ Joule = 10^7$ erg.

Remarque:

1 dyne = 10^{-5} N (1N= Kg.m. s^{-2})

II.8. Comment déterminer les exposants α, β et γ?

L'opération qui consiste à déterminer les nombres réels α, β et γ s'appelle l'analyse dimensionnelle de la grandeur G.

Pour arriver à cette fin, on recherche les formules des définitions ou toute expression obtenue par une étude théorique à partir de ces définitions.

Exemple :

Supposons que l'on prenne pour grandeurs fondamentales la force (F), la masse volumique (ρ) et la fréquence (N). Ecrire les équations aux dimensions de la longueur dans le système : FρN ?

$L = F^{\alpha}. \rho^{\beta}. N^{\gamma}$

$[F] = [m].[a]= M. L.T^{-2}$

$[\rho]= [m]/ [V]= M. L^{3}$

$[N]= [t]^{-1}= T^{-1}$

Donc $[L] = (M. L.T^{-2})^{\alpha}. (M. L^{-3})^{\beta}. (T^{-1})^{\gamma}= M^{\alpha+\beta}. L^{\alpha- 3\beta}. T^{-2\alpha- \gamma}= L$

$\alpha+ \beta = 0 \Rightarrow \alpha = -\beta = 1/4$

$\alpha- 3\beta = 1\Rightarrow \beta = -1/4$

$-2\alpha- \gamma = 0\Rightarrow \gamma = -1/2$

Donc $L = F^{1/4}. P^{-1/4}. N^{1/2}$

III. Erreurs et incertitudes de mesure

Les valeurs mesurées de grandeurs physiques sont toujours entachées d'erreurs, la valeur mesurée n'est alors qu'une valeur approchée.

III.1. Les différents types d'erreurs

On peut distinguer deux types d'erreurs

- **Erreurs systématiques**: c'est une erreur qui se renouvelle à chaque mesure à cause :
  -d'un défaut de l'appareil de mesure, ou d'un zéro mal réglé
  -d'une erreur liée à l a méthode de mesure
  Exemple : mesure de tension et d'intensité pour un dipôle
- **Erreurs aléatoires** : elles sont difficiles à prévoir

III.2. Mesure directe et indirecte

La mesure d'une grandeur physique eut se faire de façon directe ou indirecte :

III.2.1.Mesure directe : le grenadeur à mesure est comparée à une grandeur de même nature appelée étalon avec l'aide d'un instrument de mesure.

Exemple : la mesure de la longueur d'une porte avec un mètre gradué.

III.2.2.Mesure indirecte : la mesure est déduite de celle d'autres grandeurs, on utilise donc une loi qui permet de passer automatiquement ou par un calcul à la grandeur cherché.

Exemple : Mesure de la résistance par la méthode de l'ampèremètre et du voltmètre (R=VI).

III.3. Calculs d'incertitudes sur les mesures directes

III.3.1.Valeurs exacte et valeur approchée d'une grandeur

Soit G une grandeur à mesurer, nous appelons G_m la valeur mesurée de G, G_e la valeur exacte et inconnue de G mais qu'on peut limiter dans un intervalle.

Si la mesure est répétée n fois, on obtient alors n valeurs mesurées G_1, G_2,……,G_n.

III.3.2.Erreur absolue (**δG**): c'est la valeur absolue de l'écart entre la valeur vraie (G_v) et la valeur mesurée (G_m). La valeur vraie G étant inconnue, l'erreur absolue l'est également.

$$\delta G = |G_v - G_m| = \text{inconnue}$$

III.3.3.L'incertitude absolue ΔG

δG étant impossible à déterminer, on appelle incertitude absolue la valeur maximale que l'erreur absolue pourrait atteindre :

$$\Delta G = max\,|\delta G|\ unité$$

La valeur la plus probable est donnée par la valeur moyenne des n valeurs trouvées :

$$G_{moy} = G_m = \frac{G_1 + G_2 + \cdots + G_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} G_i}{n}$$

Pour évaluer ΔG, on a le choix entre deux procédés.

- **Premier procédé :**

Dans ce cas, on prend :

$$\Delta G = max\{|G_1 - G_m|, |G_2 - G_m|, \ldots, |G_n - G_m|\}$$

- **Second procédé :**

ΔG est égale à la moyenne des écarts calculés précédemment :

$$\Delta G = \frac{|G_1 - G_m| + |G_2 - G_m| + \cdots + |G_n - G_m|}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |G_i - G_m|}{n}$$

III.3.4.Incertitude relative et précision d'une mesure

L'incertitude relative d'une mesure est définie par le rapport de l'incertitude absolue et la valeur mesurée $\frac{\Delta G}{G}$ (rapport sans unité). Si on l'exprime en %, dans ce cas on parle de la précision de la mesure.

Elle nous donne la précision de la mesure et s'exprime par le rapport :

$$\varepsilon\% = \frac{\Delta G}{G} . 100$$

Les résultat de la mesure s'écrit alors :

$$G = (G_m \pm \Delta G)\ unités$$

On dit aussi que G est connu à ΔG prés.

Exemple :

$$I = (16.5 \pm 0.1)m$$

Exercice :

Pour manque de fidélité de notre ampèremètre, on répète 5 fois la mesure de l'intensité du courant électrique (en mA) qui traverse une résistance R. Les résultats obtenus sont : 101,00 ; 102,30 ; 99,80 ; 100,90 ; 98,50.

1. Donner le résultat de cet ensemble de mesures par deux méthodes différentes.
2. Quelle est la précision de mesure dans chaque cas.

III.4. Calcul d'incertitude sur une mesure indirecte

1. **La méthode de la différentielle totale :**

- Cas d'une fonction à une seule variable

Soit f(x) une fonction définie :

$$Y = f(x)$$

On appelle différentielle de la fonction y :

$$dy = f_x' dx$$

f_x' : est la dérivée la fonction f(x) par rapport à x et dx

dy éléments démentielles de x et y respectivement.

Remarque : différentielle : petite variation

Exemple :

Calculer la différentielle dV de la fonction :

$V(t) = V_m\, Sin\,(wt + \emptyset)$

$$dV = V_t' dt = \frac{\partial V}{\partial t}\, dt = wV_m\, cos\,(wt + \emptyset)dt$$

- **Cas d'une fonction à plusieurs variables**

On appelle différentielle totale dG de la fonction G

- La somme : G = x +y

On a : $dG = \frac{\partial G}{\partial x}\ dx + \frac{\partial G}{\partial y} dy \Rightarrow \Delta G = \Delta x + \Delta y$

- Le produit ou le quotient :

Si $G = G_1\ G_2^{\alpha}$

$$dG = \frac{\partial G}{\partial G_1}\ dG_1 + \frac{\partial G}{\partial G_2} dG_2$$

Exemple :

$$\boldsymbol{\rho = \frac{m}{V}}$$

On peut utiliser la loi précédente de dG, comme on peut aussi appliquer la différentielle totale :

$$d\rho = \rho_m^{'} dm + \rho_m^{'} dV = \frac{\partial \rho}{\partial m}\ dm + \frac{\partial \rho}{\partial V} dV$$

$\rho_m^{'}$ est la dérivée la masse volumique par rapport à m (m : la masse)

$\rho_V^{'}$ est la dérivée la masse volumique par rapport à V (V : la volume).

$$\frac{\partial \rho}{\partial m} = \frac{1}{V}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial V} = -\frac{m}{V^2}$$

$$d\rho = \frac{1}{V}.dm - \frac{m}{V^2}.dV$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = \left(\frac{1}{V}.dm - \frac{m}{V^2}.dV\right)\frac{1}{\rho} = \left(\frac{1}{V}.dm - \frac{m}{V^2}.dV\right).\frac{V}{m}$$

$\Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{m}.dm + -\frac{1}{V}.dV$

$$\Rightarrow \frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta V}{V}$$

2. **la méthode logarithmique :**

Une autre méthode de calcul pratique permet de d'estimer ces incertitudes (relatives et absolues), il s'agit de la différentielle de la fonction logarithmique

$$\boldsymbol{d}(\ln \boldsymbol{G}) = \frac{\boldsymbol{dG}}{\boldsymbol{G}}$$

Exemple :

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{V}}$$

On peut utiliser la loi précédente de dρ, comme on peut aussi appliquer la différentielle logarithmique de ρ.

On a : $ln\,\rho = \; ln\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{V}} = ln\,m - ln\,V$

$d(ln\,\rho) = (\ln\rho)'\,d\rho = \; \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dm}{m} - \frac{dV}{V}$

Finalement l'incertitude relative sera :

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta V}{V}$$

III.5.Conduite de calcul d'incertitude

- Calculer la différentielle et la différentielle logarithmique de la grandeur à mesurer .
- Regrouper les termes relatifs aux mêmes différentielles.
- Passer aux incertitudes (remplacer les différentielles par les incertitudes absolues et en prenant la valeur absolues des coefficients).
- Calcul numériques et expressions du résultat.

➢ **Comment déterminer le nombre de chiffres significatifs** à conserver lors d'un calcul :

Lorsque ces nombres sont utilisés dans des calculs usuels (addition, multiplication, …), il faut prendre garde au nombre de chiffres significatifs à conserver pour que le résultat ait du sens.

➢ **Addition, soustraction**

La règle porte sur les décimales et consiste à dire que le résultat d'une addition ou d'une soustraction ne doit pas avoir plus de décimales que la donnée qui en a le moins.

Exemple : X= 2,3 + 4,56 = 6,86 = 6,9.

- **Multiplication, division**

La règle porte ici sur le nombre de chiffres significatifs et stipule que le résultat ne doit pas avoir plus de chiffres significatifs que la donnée qui en a le moins.

Exemple : y = 3,4 . 2,15 = 7,31 = 7,3.

Résume :

Opération	G	$\frac{\Delta C}{G}$ ou ΔG
Somme	**G= a+b**	$\Delta G = \Delta a + \Delta b$
différence	**G= a-b**	$\Delta G = \Delta a + \Delta b$
produit	**G = a. b**	$\frac{\Delta G}{G} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$
quotient	**G= a/b**	$\frac{\Delta G}{G} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$
puissance	**G = a^n**	$\frac{\Delta G}{G} = n.\frac{\Delta a}{a}$

Important : Nous écrivons toujours le résultat d'une mesure sous la forme :

$$\boldsymbol{X = (X_m \pm \Delta X).u}$$

X : valeur exacte.

X_m: valeur approchée.

$\Delta \boldsymbol{X}$: Incertitude absolue.

$\boldsymbol{u}$: unité de la grandeur.

Exemple :

$$m = (\mathbf{100,0 \pm 0,1})\ \boldsymbol{kg}$$

$$l = (\mathbf{98,70 \pm 0,04})\ \boldsymbol{m}$$

Exercice :

Vous mesurez la longueur *l* et la période T d'un pendule. Vous obtenez *l* = (1.000 ± 0.005) m et T = (2.00 ± 0.01) s. Vous calculez l'accélération terrestre donnée par : g = $\frac{4\pi^2 l}{T^2}$

1. L'incertitude absolue sur la mesure de l'accélération terrestre (Δg) est :

a. $\Delta g = g\,(\frac{\Delta T}{T} + 2\,\frac{\Delta l}{l})$ b. $\Delta g = (\frac{\Delta l}{l} + 2\,\frac{\Delta T}{T})$ c. $\Delta g =$ ……………………….

2. le résultat de la mesure de l'accélération (g ± Δg)est :

a. (9.90 ± 0.01) m/s^2 b. (9.98 ± 0.01) m/s^2 c. ………………………….

3. la précision de la mesure ($\varepsilon\% = \frac{\Delta g}{g}.100$)est :

a.1.11% b.2% c……………………………..